Różniczkowanie

1 Ciśnienie i objętość gazu doskonałego ulegającego przemianie adiabatycznej podlegają prawu Poissona

$$PV^{\gamma} = k,$$

gdzie γ i k są stałymi dla danego gazu.

Jeśli dla przemiany adiabatycznej sporządzimy wykres zależności ciśnienia od objętości, wykaż, że gradient krzywej przedstawionej na tym wykresie dany jest jako

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} = -\gamma\frac{P}{V}.$$

Rozwiązanie

2 Drugie prawo Kirchhoffa mówi, że suma spadków napięcia w zamkniętym obwodzie elektrycznym jest równa sile elektromotorycznej występującej w tym obwodzie.
Jeśli opornik o oporze R omów, cewka o indukcyjności L henrów i kondensator o pojemności C faradów są połączone szeregowo ze źródłem siły elektromotorycznej $E(t)$ woltów, wykaż, że obwód można opisać następującym równaniem różniczkowym:

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{i(t)}{C} = E'(t),$$

gdzie $i(t)$ to natężenie prądu (ampery) płynącego w obwodzie, a $q(t)$ to ładunek elektryczny (kulomby) kondensatora w czasie t sekund oraz gdzie $i(t) = q'(t)$.

Rozwiązanie

3 Widmo promieniowania ciała doskonale czarnego jest dane jako:

$$u(\lambda) = \frac{8\pi c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1},$$

gdzie λ to długość fali promieniowania, $u(\lambda)$ to gęstość energii pomiędzy długościami fal λ i $\lambda + \mathrm{d}\lambda$, a h, c i T to odpowiednio stała Plancka, prędkość światła i temperatura bezwzględna, natomiast k to stała Boltzmanna. Wykaż, że $u'(\lambda) = 0$, jeśli $\dfrac{x}{1 - e^{-x}} - 5 = 0$, gdzie $x = hc/\lambda kt$. Następnie, sporządzając wykres funkcji $f(x) = \dfrac{x}{1 - e^{-x}} - 5$ w arkuszu kalkulacyjnym dla $-10 \leqslant x \leqslant 20$, wykaż, że $\lambda = \dfrac{hc}{5kT}$ jest pierwszym przybliżeniem λ, jeśli $u'(\lambda) = 0$.

Rozwiązanie

Rozwiązania

1 $PV^\gamma = k$, a zatem $P = kV^{-\gamma}$.

Konsekwentnie:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} &= \frac{\mathrm{d}kV^{-\gamma}}{\mathrm{d}V} \\ &= -k\gamma V^{-\gamma-1} \\ &= -\gamma(kV^{-\gamma})V^{-1} \\ &= -\gamma\frac{P}{V}\end{aligned}$$

Pytanie

2 Gdy zmieniający się prąd przechodzi przez indukcyjność, indukuje on napięcie przeciwne, które powoduje spadek potencjału na indukcyjności.

Zgodnie z prawem Faradaya jest to

$Li'(t)$.

Gdy prąd przepływa przez rezystancję, generuje ciepło, tracąc w ten sposób energię z obwodu. Objawia się to spadkiem potencjału na rezystancji.

Zgodnie z prawem Ohma jest to

$Ri(t)$.

Gdy źródło prądu jest podłączone do pojemności, pojemność magazynuje energię z obwodu. Objawia się to spadkiem potencjału na pojemności wyrażonym jako

$$\frac{q(t)}{C}.$$

Prawo Kirchoffa mówi, że napięcie przyłożone do obwodu jest równe spadkom potencjałów na różnych elementach obwodu. Dla obwodu szeregowego RLC oznacza to, że jeśli E(t) jest przyłożoną w obwodzie siłą elektromotoryczną, to

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E(t).$$

Po zróżniczkowaniu tego równania otrzymamy

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{q'(t)}{C} = E'(t).$$

Wiemy, że natężenie prądu jest równe szybkości zmiany ładunku, czyli $q'(t) = i(t)$. Daje to równanie

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{i(t)}{C} = E'(t).$$

Pytanie

---

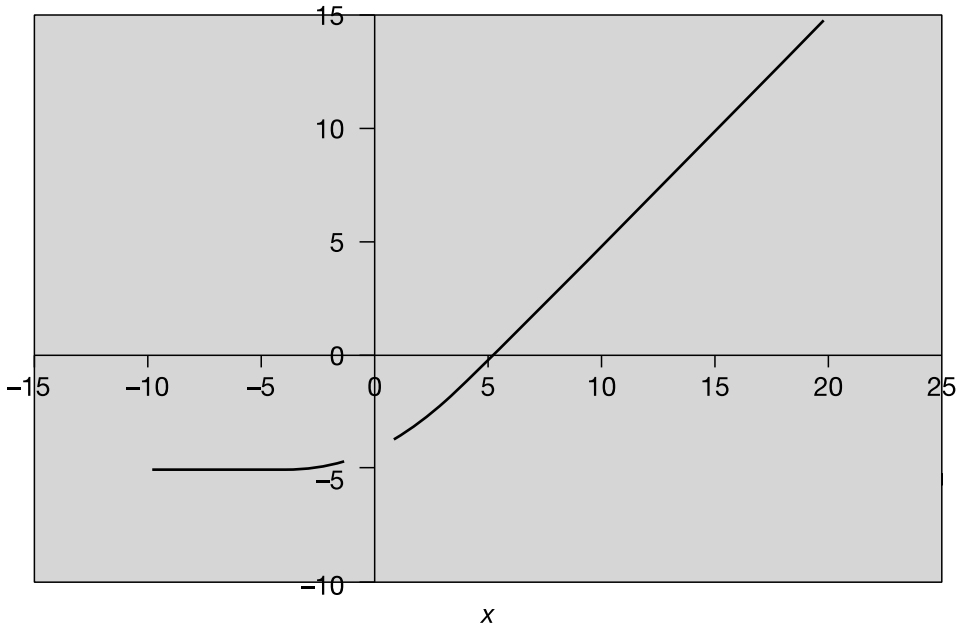
3 $u(\lambda) = \dfrac{8\pi c}{\lambda^5}\dfrac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$, zatem:

$$\begin{aligned}
u'(\lambda) &= -5\frac{8\pi c}{\lambda^6}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1} - \frac{8\pi c}{\lambda^5}\frac{\left(-hc/\lambda^2 kT\right)e^{hc/\lambda kT}}{\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)^2} \\
&= -5\frac{8\pi c}{\lambda^6}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1} + \frac{8\pi c}{\lambda^6}\frac{(hc/\lambda kT)e^{hc/\lambda kT}}{\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)^2} \\
&= -5\frac{8\pi c}{\lambda^6}\frac{1}{e^{x}-1} + \frac{8\pi c}{\lambda^6}\frac{xe^{x}}{\left(e^{x}-1\right)^2}, \text{ gdzie } x = hc/\lambda kT \\
&= \frac{8\pi c}{\lambda^6}\frac{1}{e^{x}-1}\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1} - 5\right) \\
&= \frac{8\pi c}{\lambda^6}\frac{1}{e^{x}-1}\left(\frac{x}{1-e^{-x}} - 5\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

jeśli tylko spełniony jest warunek

$$\frac{x}{1-e^{-x}} - 5 = 0.$$

Z wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x}{1 - e^{-x}} - 5$ zobaczysz, że $x = 5$ jest przybliżonym rozwiązaniem równania $f(x) = 0$ (Zauważ, że $x = 0$ nie należy do dziedziny funkcji).



Pytanie